n-Boundedカウンター・オートマトンについて (オートマトン理論および言語理論の新展開)

菅田, 一博; 森田, 憲一; 梅尾, 博司

数理解析研究所講究録
270巻 1976年 74-80

n-bounded カウンター・オートマトンについて

阪大 基礎工学部 菅田 一博
森田 憲一
梅尾 博司

1. はしがき

パターン認識のアルゴリズムをその直接の研究対象としたものに，2次元テープ・オートマトンによる図形処理という問題がある。すでに体系化された1次元形式言語とそのアクセプターであるオートマトンの理論の自然な拡張として，図形を2次元形式言語として把え，定式化することが試みられている。そして1次元形式言語で明らかにされている性質と同様な結果が図形に対しても成立しないかという期待は当然，考えられる。しかし，1次元と2次元の結果が対応しないのが普通であり，1次元の議論から類推して2次元の結果を導出できないことは多くの人が経験している。たとえば，文脈依存形をした2次元形式文法で生成される正方形図形は2次元有限オートマトンで認識される例はその一つである。

この1次元と2次元の相違はオートマトンの2次元的な動きに起因している。つまり，2次元オートマトンはテープ上での自分の位置情報を巧みに利用し，ヘッドの移動方向を工夫して，1次元では考えられなかった認識アルゴリズムが存在するからである。この2次元的な動作が持つ機能は，ほぼ n-bounded カウンターで近似できることを先きに示した。ここでは，n-bounded カウンター・オートマトンを定義し，それが受理する言語のクラスについて議論する。さらに，普通のカウンター・オートマトンと n-bounded カウンター・オートマトンの関係について明らかにする。

2. n-bounded カウンター・オートマトン

〔定義1〕 長さnの入力系列に対し，底記号 Z_0 以外に書き込み記号Xを一つ持つ長さnのプッシュダウン・メモリーを n-bounded カウンターと呼ぶ。

〔定義2〕 2方向決定性 n-bounded・N カウンター・オートマトン C_N とは，有限制御部と，両端に境界記号Bが書かれた1次元入力テープ上を2方向に自由に動いて記号を読みとることができる一つのヘッド，および N個の n-bounded カウンターからなるオートマトンである。C_N はそれぞれの n-bounded カウンターについて，その内容が“空”（底記

号 Z_0 がプッシュダウン・メモリーの先頭記号である）であるか，それとも"満杯"（Xが n 個書かれている）であるかを知ることができる。また，C_N はそれぞれの n-bounded カウンターを使って，n までの任意の数を計数できる。

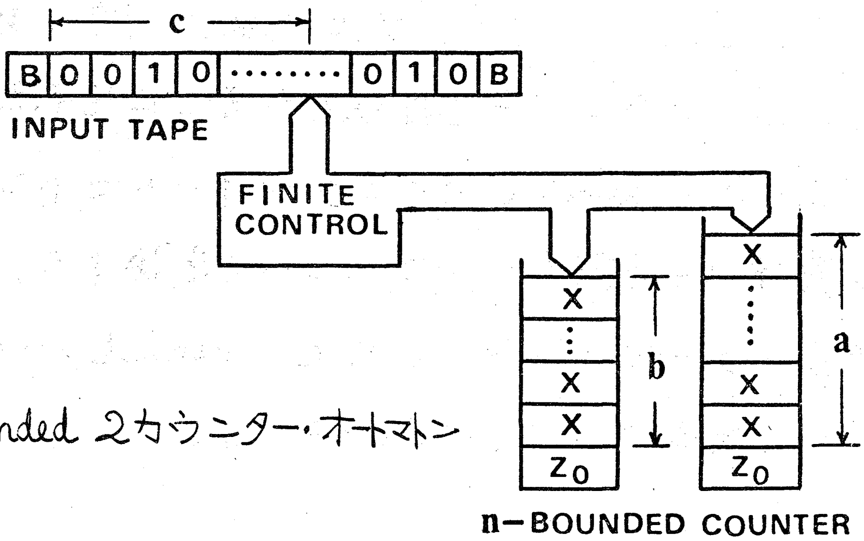


図1. n-bounded 2カウンター・オートマトン

〔定義3〕　決定性Nマーカーオートマトン M_N とは，1次元決定性有限オートマトンに，入力テープ上の任意の位置に目印としてN個までのマーカー $\{m_1, m_2, \cdots, m_N\}$ を自由に置き，これを読み取る機能を付与したシステムである。

このとき，次のような関係が成立する。

〔定理1〕　C_1 は任意の正規集合を認識できる。

〔定理2〕　C_1 により認識できるような正規集合でない文脈自由言語が存在する。

〔定理3〕　C_1 により認識できるような文脈自由言語でない文脈依存言語が存在する。

〔定理4〕 M_Nにより受理される言語は，C_Nで受理される。すなわち，関係

$$\mathcal{L}_{M_N} \subseteqq \mathcal{L}_{C_N}$$

が成立する。ただし，$\mathcal{L}_A$はオートマトンAのクラスで受理される言語の集合である。

〔定理5〕 C_{N-1}により受理される言語は，M_Nで受理される。すなわち，関係

$$\mathcal{L}_{C_{N-1}} \subseteqq \mathcal{L}_{M_N}$$

が成立する。

〔定理6〕 M_{N+3}の言語受理能力は，M_Nのそれより真に大きい。すなわち，関係

$$\mathcal{L}_{M_N} \subsetneqq \mathcal{L}_{M_{N+3}}$$

が成立する。

〔定理7〕 C_{N+4}の言語受理能力は，C_Nのそれより真に大きい。すなわち，関係

$$\mathcal{L}_{C_N} \subsetneqq \mathcal{L}_{C_{N+4}}$$

が成立する。

C_Nに付与されているn-boundedカウンターの個数Nがある数Kでおさえられていれば $\mathcal{L}_{C_N} \subseteqq \mathcal{L}_{C_K} \subsetneqq \mathcal{L}_{C_{K+4}} \subseteqq \mathcal{L}_{M_{K+5}}$ となる。M_{K+5}は二つの書き込み記号を持つ線形有界オートマトンより能力が小さい。したがって，次

の関係が成立する。

〔定理8〕 n-bounded カウンター・オートマトンの言語受理能力は線形有界オートマトンより真に小さい。つまり，文脈依存言語のクラスを $\mathcal{L}_{L.B.A}$ で表現すると，関係

$$\mathcal{L}_{C_N} \subsetneqq \mathcal{L}_{L.B.A}$$

が成立する。

3．カウンター・オートマトンとの関係

〔定義4〕 2方向決定性1カウンター・オートマトン K_1 とは，有限制御部と両端に境界記号を持つ入力テープ上を2方向に自由に動いて記号を読み取ることのできるヘッド，および底記号 Z_0 以外に書き込み記号 X を一つ持つプッシュダウン・メモリー（カウンター）からなるシステムである。

〔定理9〕 C_1 で任意の K_1 を模倣できる。すなわち，

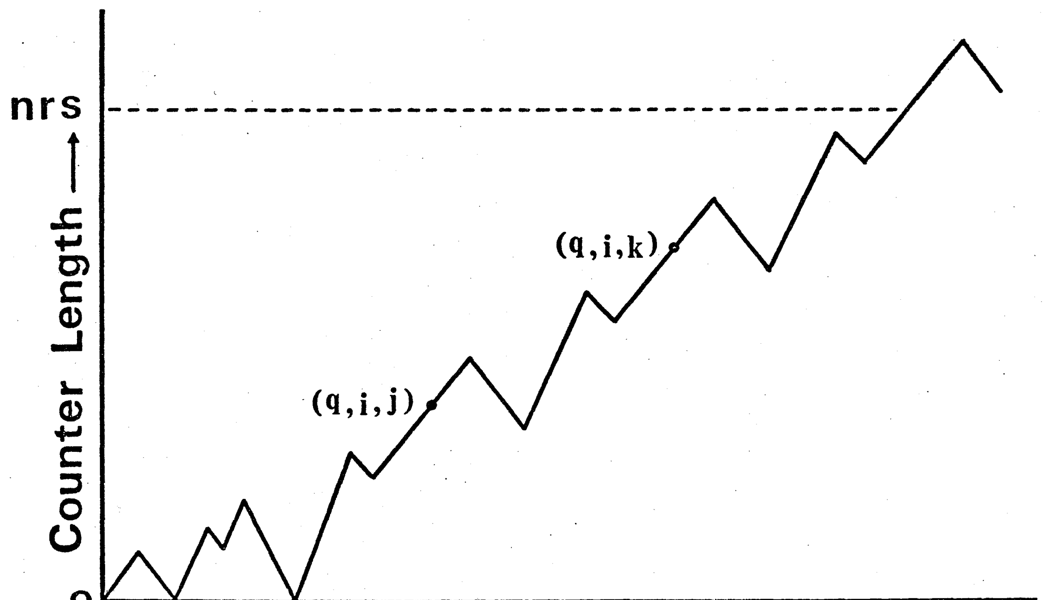
$$\mathcal{L}_{K_1} \subseteqq \mathcal{L}_{C_1}$$

が成立する。

〔証明〕 K_1 の状態数を S，1回の動作で増加されるカウンターの内容（書き込まれる記号 X の個数）の最大数を r とする。また，K_1 の計算状況を (q, i, j) で示す。但し q は内部状態，i は入力ヘッドの位置で $1 \leqq i \leqq n$，j はカウント数で $j \geqq 0$ である。

このとき，K_1の動作がループに陥って，カウンターの内容が無限に増加するようなことがなければ，K_1が計数する数は高々 nrs である。なぜなら，K_1が nrs 以上の数を計数したとすると，計算過程において，次の二つの計算状況 (q, i, j) および (q, i, k) が現われる。ここで，i, j, k は $1 \leq i \leq n$, $0 < j < k \leq nrs$ なる整数で，計算状況 (q, i, j) からは途中でカウンター内容が“空”になることはなく，計算状況 (q, i, k) に移行する。K_1の有限制御部は，カウンターの内容が“空”か否かを知ることができるだけであるので，このような状況がいったん現われると，それ以後はカウンターの内容は無限に増加する。

従って，与えられたK_1に対して，それと同じ言語を受理



するC$_1$を次のように作ればよい。C$_1$はK$_1$のヘッドの動きをそのまま模倣するが，K$_1$がカウンター内容を増加させる場合，C$_1$は有限制御部でrsまで計数し，桁上りが生じた時だけn-boundedカウンターの内容を1つ増加させる。K$_1$がカウンター内容を減少させる時も同様である。すなわち，K$_1$のカウンターの内容をrsで割った商をC$_1$のn-boundedカウンターで，余りをC$_1$の有限制御部で記憶する。C$_1$はこのようにしてK$_1$を模倣していき，K$_1$がnrs以上の数を計数し，C$_1$のn-boundedカウンターが"満杯"になれば，C$_1$はその入力を受理せず停止する。（証終）

2カウンター・オートマトンK$_2$に関しては，その万能性がMinsky等によって証明されている。[1] したがって，関係

$$\mathcal{L}_{K_1} \subseteq \mathcal{L}_{C_1} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{L}_{C_N} \subsetneq \mathcal{L}_{C_{N+1}} \subsetneq \mathcal{L}_{L.B.A} \subsetneq \mathcal{L}_{K_2}$$

が成立することがわかった。

Open Problem

1. $\mathcal{L}_{K_1} \subsetneq \mathcal{L}_{C_1}$ が成立する。？

2元以上からなるalphabet Σ上の言語言語 $L_1=\{\omega\omega / \omega \in \Sigma^*\}$ はK$_1$で認識できない。その証明は可能であるか？

2. 文脈自由言語 $\mathcal{L}_{P.D.A}$ と $\mathcal{L}_{C_N}$ との関係？

3. C$_N$を非決定性にすれば，その能力はどうなるか？

参考文献 (1) J.E. Hopcroft and J.D. Ulman. "Formal Language and Their Relation to Automata", Adison-Wesley. (1969)